Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Управление и обработка информации в кибернетических и робототехнических системах

Черноярова Юлия Владимировна

Стохастический консенсус в мультиагентных динамических системах

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель:
д. т. н., профессор А. Л. Фрадков

Рецензент:
к. ф.-м. н., доцент М. С. Ананьевский

Санкт-Петербург
2018

Saint Petersburg State University
Applied Mathematics and Computer Science
Control and Information Processing in Cybernetic and Robotic Systems

Chernoiarova Iuliia Vladimirovna

Stochastic consensus in multi-agent dynamical systems

Graduation Project

Scientific Supervisor:
Professor A. L. Fradkov

Reviewer:
Associate Professor M. S. Ananyevskiy

Saint Petersburg
2018

Оглавление

1. Введение

Рассматривается задача достижения консенсуса в сети динамических агентов при фиксированной топологии. Для каждого агента управляющее воздействие строится на основе его состояния и состояний ближайших соседей, которые могут быть искажены. Для того, чтобы ослабить влияние шумов, при построении протокола будет использоваться коэффициент усиления $a(t)$.

Подобные задачи при отсутствии шумов широко исследованы, например, в работах Moreau & Belgium(2004)[1] и Olfati-Saber & Murray(2004)[2].

Предъявлены достаточные условия на коэффициент усиления для достижения консенсуса, получена оценка математического ожидания ошибки.

2. Постановка задачи

Обозначения:

$g = \{V, \mathcal{E}, A\}$ - взвешенный ориентированный граф.

V-множество узлов, $\mathcal{E}$ -множество ребер.

$N_i = \{j \in V | (j,i) \in \mathcal{E}\}$ - множество родителей вершины i.

$V_s = \{j \in V| \; |N_j| = 0\}$ - множество всех источников и изолированных вершин.

$A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ - взвешенная матрица смежности g.

$a_{ij} \geqslant 0, \; a_{ij} > 0 \Longleftrightarrow j \in N_i$

$deg_{in}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}, \; deg_{out}(i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$

Лапласовская матрица $L_g = D - A$, где $D = diag(deg_{in}(1), \dots, deg_{in}(N))$

$a \wedge b = \min\{a, b\}$

Лемма 1. *Пусть $g = \{V, \mathcal{E}, A\}$ - неориентированный граф*

Тогда L_g - симметричная матрица, имеющая N вещественных возрастающих собственных значений:

$$0 = \lambda_1(L_g) \leqslant \lambda_2(L_g) \leqslant \dots \leqslant \lambda_N(L_g),$$

и

$$\min_{x \neq 0, \mathbf{1}^T x = 0} \frac{x^T L_g x}{\|x\|^2} = \lambda_2(L_g),$$

где $\lambda_2(L_g)$ - алгебраическая связность g. Если g сильно связный, тогда $\lambda_2(L_g) > 0$.

Рассматривается задача достижения консенсуса в сети агентов в форме:

$$\dot{x}_i(t) = \alpha x_i + u_i(t),\ i = 1, 2, \dots, N, \tag{2.1}$$

где $x_i(t) \in \mathbb{R}$ - состояние i-го агента, $u_i(t) \in \mathbb{R}$ - управляющее воздействие. Начальное состояние $x_i(0)$ определено. Обозначим $X(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$. Каждый агент может обмениваться информацией с "соседями".

Для i-го агента:

$$y_{ji}(t) = x_j(t) + \sigma_{ji} n_{ji}(t),\ j \in N_i, \tag{2.2}$$

где $y_{ji}(t)$ - измерение состояния j-го агента i-ым, $\{n_{ji},\ i, j = 1, 2, \dots, N\}$ - стандартный белый шум, $\sigma_{ji} \geqslant 0$ - интенсивность шума.

Граф g называется *информационным графом* или *топологией сети* системы (2.1), а пара (g, X) - *динамической сетью.*

Применение протокола U к системе (2.1)-(2.2) приведет к стохастической замкнутой системе, где все $x_i(t)$ - случайные процессы.

Для динамической сети (g, X) предагается протокол в виде:

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & i \in V_s, \\ a(t) \sum\limits_{j \in N_i} a_{ij}(y_{ji}(t) - x_i(t)), & i \in V - V_s,\ \forall t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $a(\cdot) : [0, \infty) \to (0, \infty)$ - кусочно непрерывная функция, называемая *коэффициентом усиления.*

3. Анализ сходимости

Введем обозначения:

- α_i - i-ая строка матрицы A,
- $\Sigma_i = diag(\sigma_{1i}, \dots, \sigma_{Ni}),\ i = 1, 2, \dots, N$, где $\sigma_{ji} = 0, j \notin N_i$.
- $\Sigma = diag(\alpha_1^T \Sigma_1, \dots, \alpha_N^T \Sigma_N)$ - $N \times N^2$ - блочно-диагональная матрица.
- $n_i(t) = [n_{1i}(t), \dots, n_{Ni}(t)]^T$.
- $\eta(t) = [n_1^T(t), \dots, n_N^T(t)]^T$.

Подставляя протокол (2.3) в систему (2.1), получим:

$$\frac{dX(t)}{dt} = [\Big(\alpha - a(t)L_g\Big)X(t)] + a(t)\Sigma\eta(t). \tag{3.1}$$

Что можно переписать в виде стохастического уравнения Ито:

$$dX(t) = [(\alpha - a(t)L_g)X(t)]dt + a(t)\Sigma dW(t),$$

где $W(t) = [W_{11}(t), \dots, W_{N1}(t), \dots, W_{NN}(t)]^T$ - стандартный Винеровский процесс.

В дальнейшем понадобятся предположения:

(A1) g - сбалансированный орграф.

(A2) g содержит остовное дерево.

(A3) Условие сходимости $\int_0^\infty a(s)ds = \infty$.

(A4) Условие робастности $\int_0^\infty a^2(s)ds < \infty$.

(A5) В сети (g, X) $\exists$ ребро $(j, i) \in \mathcal{E}$ т.ч. $\sigma_{ji} > 0$.

Для начала будут предъявлены условия на топологию сети необходимые для достижения консенсуса с помощью протокола (2.3) при *отсутствии шумов*. Для этого потребуем отрицание условия (A5):

(A5') В сети (g, X) $\forall (j, i) \in \mathcal{E} \Rightarrow \sigma_{ji} = 0$.

В этом случае протокол (2.3) примет вид:

$$u_i(t) = \begin{cases} 0, & i \in V_s, \\ a(t) \sum\limits_{j \in N_i} a_{ij}(x_j(t) - x_i(t)), & i \in V - V_s, \end{cases} \tag{3.2}$$

Обозначим $J = \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, $\widehat{L}_g = \frac{L_g + L_g^T}{2}$, $\delta(t) = X(t) - JX(t)$, $V(t) = \delta^T(t)\delta(t)$.

Теорема 3.1. *Пусть применен протокол (2.3) к системе (2.1)-(2.2) и выполнено условие (A5').*

Тогда если выполнены условия (A1)-(A3), то

$$\lim_{t\to\infty} \|X(t) - JX(t)\| = 0 \quad \forall X(0) \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

Доказательство. Из (A5') $\Longrightarrow$ $\Sigma = 0$, из (A1) $\Longrightarrow$ $JL_g = 0$. Вместе с (3.1) получаем:

$$\frac{dJX(t)}{dt} = \alpha JX(t), \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= 2\delta^T\Big(\alpha(I-J) - a(t)L_g\Big)X(t) \\ &= 2\delta^T\Big(\alpha(I-J) - a(t)L_g\Big)\delta + 2\delta^T\Big(\alpha(I-J)\Big)JX \\ &= 2\delta^T(t)\Big(\alpha(I-J) - a(t)L_g\Big)\delta(t) = 2\delta^T(t)\Big(\alpha(I-J) - a(t)\widehat{L}_g\Big)\delta(t). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из леммы 1 получаем неравенство $\delta^T(t)\widehat{L}_g\delta(t) \geqslant \lambda_2(\widehat{L}_g)V(t)$ и $\lambda_2(\widehat{L}_g) > 0$. Отсюда и условия (3.5) следует, что

$$\frac{dV(t)}{dt} \leqslant 2\delta^T\Big(\alpha(I-J)\Big)\delta - 2\lambda_2(\widehat{L}_g)a(t)V(t) \leqslant 2\Big(\alpha - \lambda_2(\widehat{L}_g)a(t)\Big)V(t)$$

Из леммы Гронуолла [4] вытекает:

$$V(t) \leqslant V(0)\exp\Bigg\{2\Big(\alpha t - \lambda_2(\widehat{L}_g)\int\limits_0^t a(s)ds\Big)\Bigg\}. \tag{3.6}$$

1. $\alpha < 0$

   Т.к. $\lambda_2(\widehat{L}_g) > 0$ и выполняется условие (A3) $\Longrightarrow V(t) \to 0$. Из этого следует, что

   $$\lim_{t\to\infty} \|\delta(t)\| = 0. \tag{3.7}$$

   Кроме того, это утверждение можно усилить и показать, что достигается средний консенсус:

   Из (3.4) получаем: $JX(t) = e^{\alpha t}JX(0)$.

   Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} JX(t) = 0 \implies \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{dJX(t)}{dt} = 0$.

   Откуда видно, что $\lim\limits_{t\to\infty} JX(t) = JX(0)$ и тем самым $\lim\limits_{t\to\infty} \|X(t) - JX(0)\| = 0$.

2. $\alpha > 0$

   Рассмотрим случай, когда коэффициент усиления является какой-то постоянной величиной: $a(t) = a_0,\ \forall t$

   Тогда $V(t) \to 0$ при $\alpha - \lambda_2(\widehat{L}_g)a_0 < 0$ т.е. $\alpha < \lambda_2(\widehat{L}_g)a_0$.

$\square$

Лемма 2. *Пусть выполнено (A1). Тогда при применении протокола (2.3) к системе (2.1)-(2.2) выполняется равенство:*

$$E\int\limits_{t_0}^{t} a_0\delta^T(s)(I-J)\Sigma dW(s)=0,\ \forall t\geqslant t_0. \tag{3.8}$$

Доказательство. Из (3.1) и (A1):

$$\begin{aligned} d\delta(t) &= [(\alpha(I-J)-a_0L_g)X(t)]dt+a_0(I-J)\Sigma dW(t)\\ &= (\alpha(I-J)-a_0L_g)\delta(t)dt+a_0(I-J)\Sigma dW(t). \end{aligned}$$

Используя лемму 1 и формулу Ито получаем

$$\begin{aligned} dV(t) &= [2\delta^T(t)(\alpha(I-J)-a_0\widehat{L}_g)\delta(t)+a_0^2C_0]dt+2a_0\delta^T(t)(I-J)\Sigma dW(t) \\ &\leqslant [2(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)V(t)+a_0^2C_0]dt+2a_0\delta^T(t)(I-J)\Sigma dW(t). \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $C_0=tr((I-J)^2\Sigma\Sigma^T)$.

Для любых $t_0\geqslant 0,\ T\geqslant t_0$ определим

$$\tau_K^{t_0,T}=\begin{cases} inf\{t\geqslant t_0:\|\delta(t)\|\geqslant K\}, \text{если } \exists t\in[t_0,T] \text{ т.ч. } \|\delta(t)\|\geqslant K\\ T,\ \text{иначе}\end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[V(t\wedge\tau_K^{t_0,T})\chi_{t\leqslant\tau_K^{t_0,T}}]-E[V(t_0)] &\leqslant 2\int\limits_{t_0}^{t}\left(\left(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0\right)EV(s\wedge\tau_K^{t_0,T})\chi_{t\leqslant\tau_K^{t_0,T}}\right)ds+C_0\int\limits_{t_0}^{t}a_0^2ds\\ &\leqslant C_0\int\limits_{t_0}^{T}a_0^2ds,\ \forall t\in[t_0,T]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\exists$ константа $C_{t_0,T}=E[V(t_0)]+C_0(T-t_0)a_0^2<\infty$ т.ч. $E[V(t\wedge\tau_K^{t_0,T})\chi_{t\leqslant\tau_K^{t_0,T}}]\leqslant C_{t_0,T},\ \forall t\in[t_0,T]$.

Т.к. $\lim\limits_{k\to\infty} t\wedge\tau_K^{t_0,T}=t\ \forall t\in[t_0,T]$. п.н., то по лемме Фату ([6]): $\sup\limits_{t_0\leqslant t\leqslant T}E(V(t))\leqslant C_{t_0,T}$.

$$E[\int\limits_{t_0}^{t}a_0^2V(s)ds]\leqslant\sup_{t_0\leqslant s\leqslant T}E(V(t))\int\limits_{0}^{T}a_0^2ds<\infty,\ \forall t\geqslant t_0\geqslant 0.$$

Кроме того,

$$E[\int\limits_{t_0}^{t}a_0^2\|\delta^T(s)(I-J)\Sigma\|^2ds]\leqslant C_0E[\int\limits_{t_0}^{t}a_0^2V(s)ds],\ \forall t\geqslant t_0\geqslant 0.$$

Откуда по свойству интеграла Ито ([7]), вытекает требуемое утверждение. $\square$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия (A1)-(A4). Тогда при применении протокола (2.3) к системе (2.1)-(2.2)*

$$\lim_{t\to\infty} E[V(t)] \leqslant -\frac{C_0 a_0^2}{2(\alpha - \lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)} \tag{3.10}$$

Доказательство. Из предыдущей леммы имеем:

$$E[V(t)] - E[V(0)] \leqslant 2\int\limits_0^t \Big(\Big(\alpha - \lambda_2(\widehat{L}_g)a_0\Big)EV(s)\Big)ds + C_0\int\limits_0^t a_0^2 ds,\ \forall t \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Введем функции $v(t) = E[V(t)]$ и $W(t)$, которая удовлетворяет уравнению:

$$\dot{W} = 2(\alpha - \lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)W + C_0 a_0^2,$$

при начальном условии $W(0) = v(0)$.

Она имеет вид: $W(t) = e^{2(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)t}\left(W(0) + \dfrac{C_0a_0^2}{2(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)}\right) - \dfrac{C_0a_0^2}{2(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)}$

Т.к. $\alpha - \lambda_2(\widehat{L}_g)a_0 < 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} W(t) \leqslant -\dfrac{C_0a_0^2}{2(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)}$

По теореме сравнения: $v(t) \leqslant W(t),\ \forall t \geqslant 0$, откуда

$$E[V(t)] \leqslant W(t) \ \Rightarrow\ \lim_{t\to\infty} E[V(t)] \leqslant -\frac{C_0a_0^2}{2(\alpha-\lambda_2(\widehat{L}_g)a_0)}.$$

□

Лемма 3. *Пусть выполнено (A1). Тогда при применении протокола (2.3) к системе (2.1)-(2.2)* $\forall t \geqslant t_0 \geqslant 0$ *верно:*

$$E[V(t)] \geqslant E[V(t_0)]\exp\left\{2\int\limits_{t_0}^t \Big(\alpha - \lambda_N(\widehat{L}_g)a(s)\Big)ds\right\} + C_0\int\limits_{t_0}^t \exp\left\{2\int\limits_s^t\Big(\alpha - \lambda_N(\widehat{L}_g)a(u)\Big)du\right\}a^2(s)ds,$$

где $C_0 = tr((I-J)^2\Sigma\Sigma^T)$.

Доказательство. Т.к. $\delta^T\widehat{L}_g\delta \leqslant \lambda_N(\widehat{L}_g)V(t)$, то по лемме (2), аналогично (3.11), получаем

$$E[V(t)] - E[V(0)] \geqslant 2\int\limits_{t_0}^t\Big(\alpha - \lambda_N(\widehat{L}_g)a(s)\Big)E[V(s)]ds + C_0\int\limits_{t_0}^t a^2(s)ds,\ \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0.$$

Используем теорему сравнения [5] и тем самым завершаем доказательство. □

4. Заключение

Предъявлены достаточные условия на коэффициент усиления для достижения консенсуса.

Данные результаты указывают, как правильно выбирать коэффициент усиления, для того, чтобы достичь консенсуса п.н, и характеризуют класс управлений, которые гарантируют достижение консенсуса при наличии шумов.

Список литературы

1. Moreau, L., & Belgium, S. G. (2004). Stability of continuous-time distributed consensus algorithms. In Proc. of the 43rd IEEE conference on decision and control, p.3998 -4003.
2. Olfati-Saber, R., & Murray, R. M. (2004). Consensus problem in networks of agents with switching topology and time-delays. IEEE Transactions on Automatic Control, 49(9), p.1520-1533.
3. Ren, W., & Beard, R. W. (2005). Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies. IEEE Transactions on Automatic Control, 50(5), p.655-661.
4. Gronwall, T. H. (1919). Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Annual of Mathematics, 2(20)
5. Michel, A. N., & Miller, R. K. (1977). Qualitative analysis of large scale dynamical systems. New York: Academic Press.
6. Chow, Y. S., & Teicher, H. (1997). Probability theory: Independence, interchangeability, martingales (3rd ed.). New York: Springer
7. Friedman, A. (1975). Stochastic differential equations and applications: Vol. 1. New York: Academic Press.